Genauigkeit der Messungen im Mittelalter (1)

Die Bestimmung von Längen

Bernd Pesch, Pesch-Consult

Lasst uns zusammen eine Kathedrale errichten

Bernd Pesch, Pesch Consult

Historische Belege zur Anwendung

- 2000. v.Chr. — Markierungen an einem Tempel in Nippur (Zweistromland)
- 1420 v.Chr. — Abbildung von „Seilspanner“ im Grab des Amenhotep-si-se bei Theben
- 1180 — Abbildung der „Arithmetica“ im „Hortus deliciarum“ der Äbtissin Herrad von Landsberg
- 12.Jhd. — Buchmalerei zur Anwendung der Schnur mit Pflöcken (Vie de St. Hugues, Paris)
- 12.Jhd. — Fresko in der Burgkapelle St. Klemens in Bonn-Schwarzrheindorf
- 12. Jhd. — Kachelbild im Kloster Alcobaca, Portugal
- 13.Jhd. — Beschreibung durch Leonardo Pisano (Fibonacci)

Eine Aufgabe aus dem Jahre 1248

Gerhard, huldvoller Baumeister, in Euren kunstgeübten Händen lege ich nicht nur die Bürde, eine Kathedrale von 500 Fuß Länge und 300 Fuß Breite zu erschaffen, zur erhabenen Ehre der Gebeine der Heiligen Drei Könige.

Meister Gerhard erkannte, dass er für ein so großes Projekt ein Referenzmaß benötigte, auf welches sich alle Handwerker beziehen konnten. Er wendete sich an seinen Bischof …

Realisierung der Maßeinheit

Hoher Bischof Rainald von Dassel, wahrer Hüter der heiligen Reliquien! Euer demütiger Diener, Meister Gerhard, wage es, vor Eurer hohen Eminenz zu treten. Ich möge demütig bitten, dass die Maße der Kathedrale zum Lobe der Himmlischen vom Fuße Eurer Heiligkeit abgenommen werden dürfen.

In Stein gemeißelt: das Bezugsnormal

Ho, ehrbare Handwerker! Meister Gerhard befiehlt, dass ihr das Längenmaß für den Dombau nicht nach weltlichen Standards nehmt, sondern vom Grundstein aus, damit jede Messung im Einklang mit himmlischer Heiligkeit stehe.

Erstellung der Gebrauchsnormale

Die Handwerker legten ihre Messschnüre an den Grundstein an und fügten Knoten im Abstand der Referenz ein, so dass die Schnur 12 Abschnitte in gleicher Länge erhielt.

Messmittel in der Anwendung

Mit der Schnur konnte man addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren, Längen messen und teilen, rechte Winkel konstruieren, gleichseitige Dreiecke bilden, Dachschrägen festlegen, Sechsecke konstruieren, Bogen schlagen und Kreise ziehen, Spitzbogenfenster konstruieren und vieles mehr.

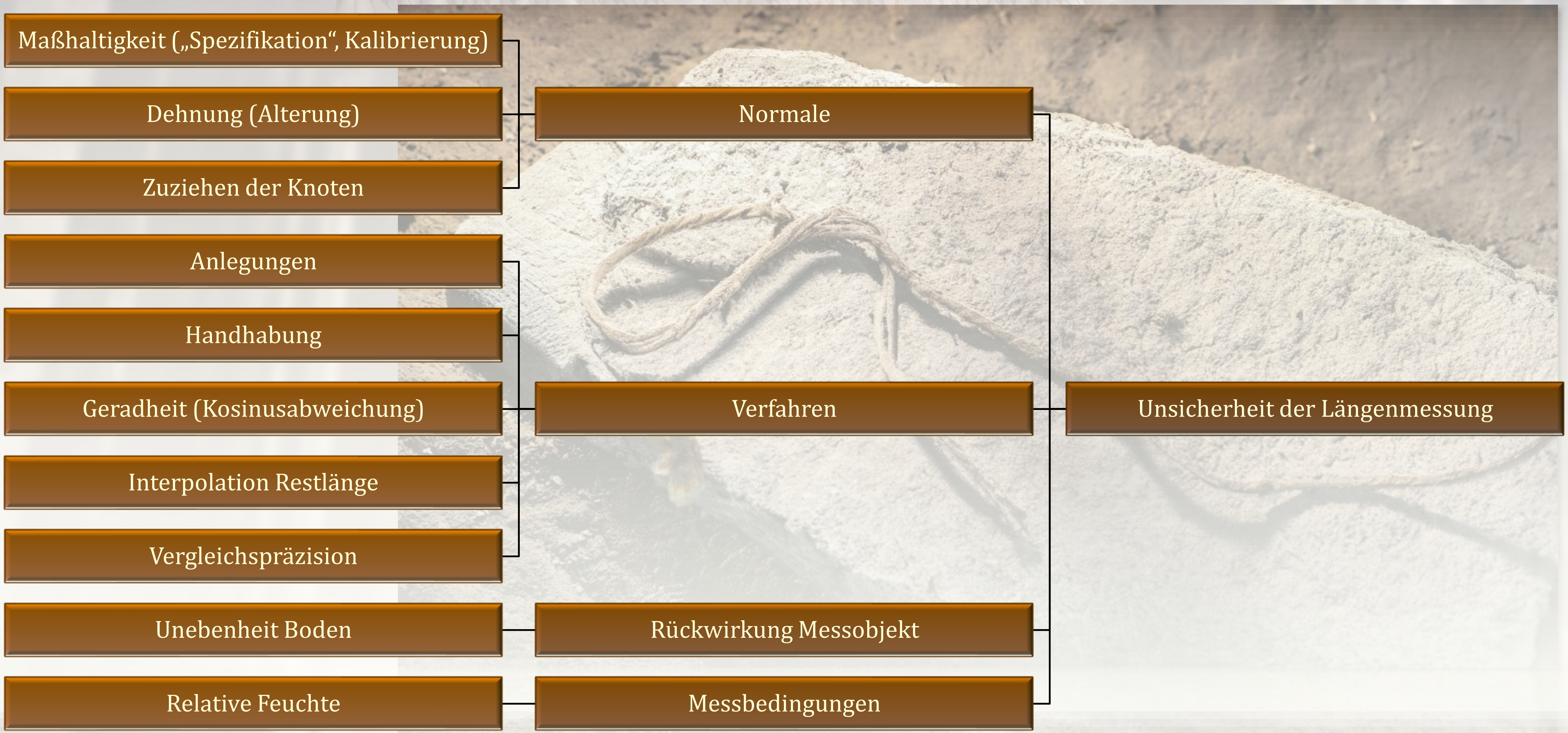
Das Maß wird international (zwischen Köln und dem Drachenfels)

Mit gleichem Maße konnten „weit weg“ im Siebengebirge im Steinbruch die notwendigen Quader behauen werden.

Rückführungspyramide

Zunahme der Unsicherheit

Was mach diese Messung unsicher?



Messunsicherheitsbilanz

Varianzen	Einfluss	WDF	√G	c	ν	w	Gew. Anteil (u^2)
Realisierung Normal	0,39 %	N	1,000	0,500	5,00 E+1	0,20 %	14 %
Kalibrierung Schnur	0,25 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,14 %	7 %
Dehnung, Alterung	0,13 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,08 %	2 %
Veränderung der Knoten	0,39 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,23 %	18 %
Anlegungen	0,10 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,06 %	1 %
Handhabung (Streckung)	0,26 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,15 %	8 %
Geradheit der Strecke	0,25 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,14 %	7 %
Unebenheit Boden	0,20 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,12 %	5 %
Wiederholpräzision	0,25 %	N	1,000	1,000	4,00 E+0	0,25 %	22 %
Temperatureinfluss	0,10 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,06 %	1 %
Relative Feuchte	0,35 %	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,20 %	14 %

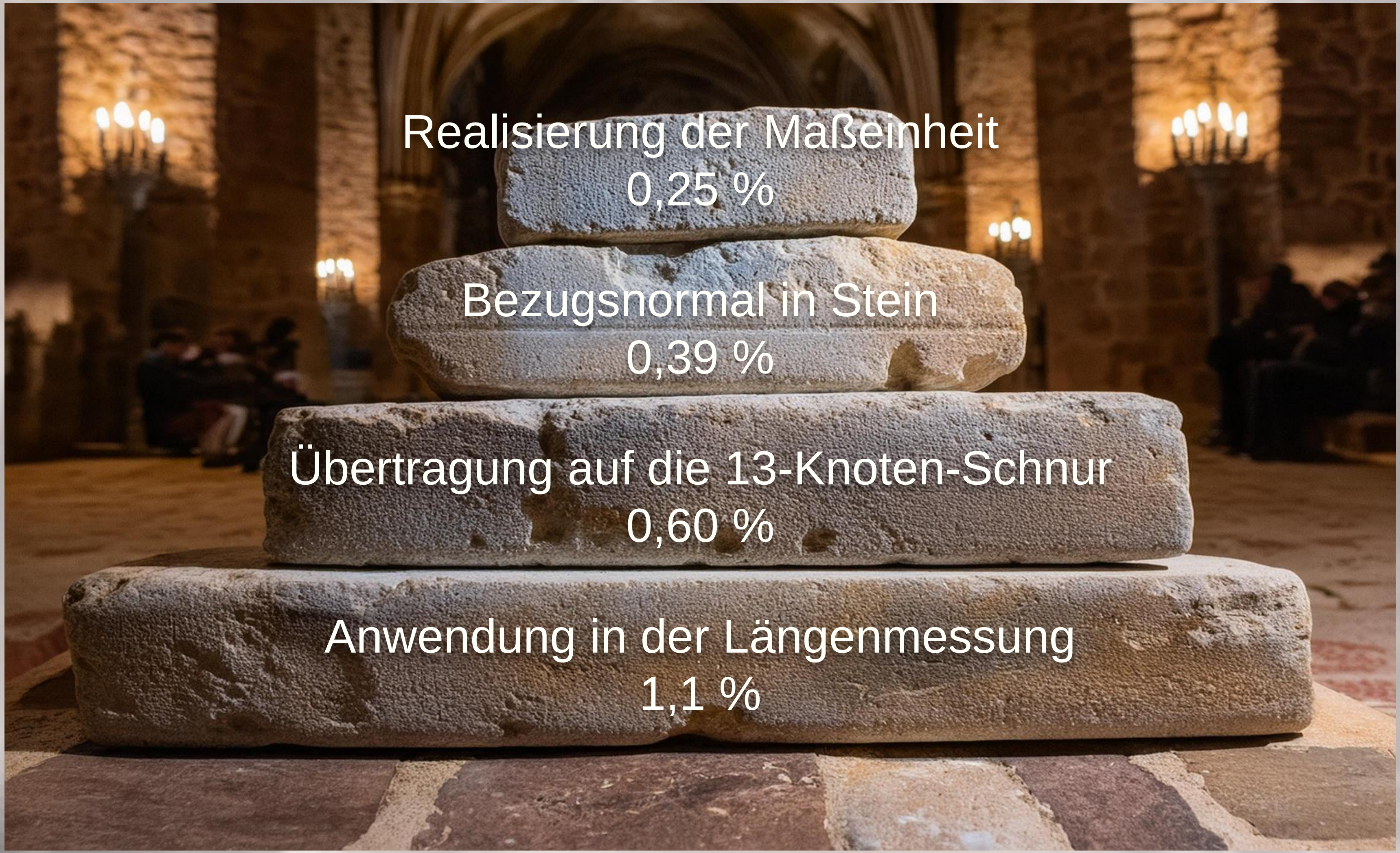
	ν	w	
Relative, kombinierte Messunsicherheit (w)	7,9 E+1	0,53 %	100 %

Erweiterungsfaktor k, gem. Zielwertsuche	2,00

		W
Erweiterte relative Messunsicherheit ($W_{0,95}$)	**7,9 E+1**	**1,1 %**

MU Bilanz

Rückführungspyramide



Angegeben sind die erweiterten Relativen Messunsicherheiten Auf Basis der Seminarauswertungen

Noch eine historische Aufgabe

Genauigkeit der Messungen im Mittelalter (2)

Der rechte Winkel mittels 13-Knoten-Schnur

Entwicklung der passenden(!) Prozessgleichung

Die Konstruktion wird unter Ausnutzung der Beziehung nach Pythagoras durchgeführt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da eine Aussage zur Unsicherheit der Winkeldarstellung gefordert wird, muss γ über den Kosinussatz beschrieben werden:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\gamma)$$

Modellgleichung:

$$\gamma = arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$

Was mach diese Messung unsicher?

Stark korrelierte Größen

- Realisierung rechter Winkel
  - Normale
    - Kathete a
    - Kathete b
    - Hypotenuse
    - Linearität
  - Verfahren
    - Anwendung Kosinussatz
    - Handhabung
    - Symmetrische Belastung
    - Wiederholpräzision
  - Rückwirkung Messobjekt
    - Ebenheit der Fläche

Prinzip der Monte Carlo Simulation

Modellierung der Messaufgabe

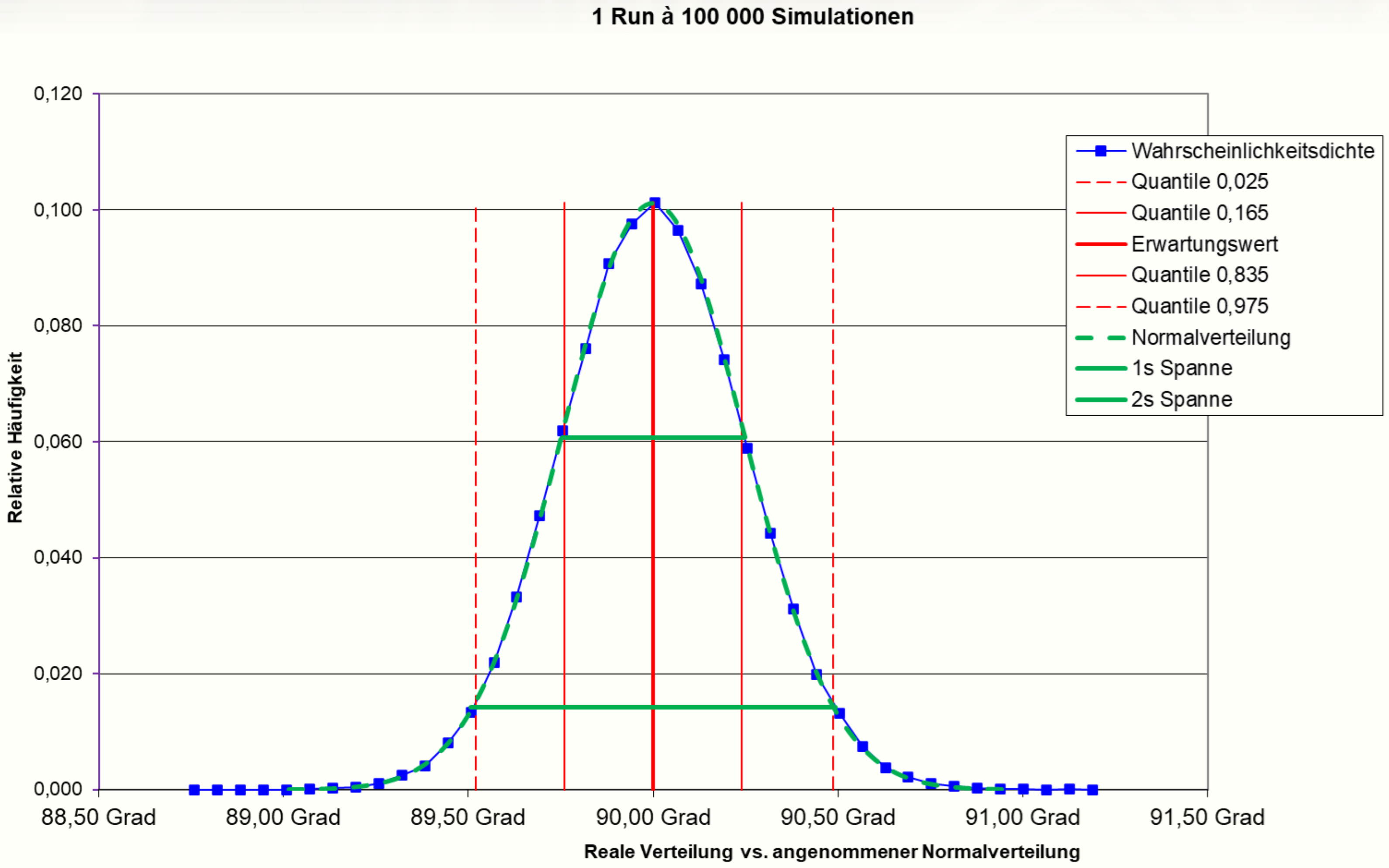
Eingangsgrößen beschreiben

Viele Simulationen der Messung unter Berücksichtigung der Unsicherheitseinflüsse

Statistische Auswertung

Visualisierung und Unsicherheitsintervall

Lösung unlinearer Aufgaben mittels numerischer Simulation



Die MCS ist nicht nur das Mittel, um unlineare Probleme zu lösen. Sie zeigt auch, dass durch die starke Korrelation der drei Längen kleine Unsicherheiten erzielbar sind:

$U_{0,95}$ = 0,44 Grad

MCS Rechter Winkel

Erkenntnisse aus der Seminarpraxis

- Messvorbereitungen und Verfahren werden ignoriert. Es wird sofort „losgemessen“.
- Mit den Messbedingungen und dem Messobjekt setzt man sich nicht auseinander. Man kennt ja den Raum.
- Die Handhabung des Messmittels wird nicht erkundet. Erst in der Praxis erkennt man, dass sich das Messmittel anders verhält, als angenommen.
- Um Hindernisse kümmert man sich erst, wann man dort anstößt.

Danke!

www.Pesch-Consult.de

Kontakt@Pesch-Consult.de