



# **INTERPOLATION UND MESSUNSICHERHEIT**

**BEITRAG ZUR DAKKS-SEKTORKOMITEESITZUNG 5.1**

**MESSUNSICHERHEIT**

**- INFORMATION -**

**REVISION 1.0**

**STAND: 10. NOVEMBER 2011**



# 1 INTERPOLATION VON MESSWERTEN

---

## 1.1 FRAGESTELLUNG

---

»Beeinflusst die Interpolation die Rückführbarkeit an den interpolierten Zwischenwerten?«

»Ist die Interpolation über einen Parameter (also mit einer variablen Eingangsgröße  $x$ ) wie z.B. Spannung, Frequenz, Widerstand als  $y = f(x)$  bei Berücksichtigung der dadurch entstehenden Abweichung an den Kontrollwerten zulässig indem z.B. die wahrscheinliche Interpolationsabweichung als Unsicherheitsbeitrag in der Messunsicherheitsbilanz berücksichtigt wird?«

## 1.2 ANALYSE DER AUSGANGSSITUATION

---

Die Rückführung ist nur an singulären Punkten – sogenannten Stützpunkten<sup>1</sup> – gegeben.

Gewünscht wird eine rückführbare Angabe von Zwischenwerten.

De facto ist die Interpolation ein gängiges Verfahren zur Ermittlung von Messgrößen, nur verbirgt sie sich in der Regel so im Messablauf, dass sie weder auffällt, noch in der Messunsicherheit als „Interpolation“ berücksichtigt wird.

Alle Messmittel, die Messbereiche aufweisen, interpolieren selbstständig Zwischenwerte durchgängig oder in kleinen Schritten; werden jedoch an immer weniger Stützpunkten rückgeführt. Bei Multifunktionsinstrumenten (Digitale Multimeter oder Kalibratoren) haben wir mittlerweile häufig zwanzig oder mehr Messbereiche, die in vielen Fällen nur noch an drei bis fünf Stützpunkten je Bereich kalibriert werden. Entsprechend groß ist der Bereich, der zwischen den Stützpunkten überspannt wird und vom Messmittel selbst interpoliert wird. Mit aller Selbstverständlichkeit ordnen wir dem Messmittel dann Messunsicherheitsbeiträge in der Art „Linearität des Messmittels“, oder ähnliche zu.

Ohne diese Interpolation – gleich welcher Art – wäre Messen gar nicht möglich und würde sich auf „zählen“ reduzieren.

---

<sup>1</sup> Wir nutzen den Begriff „Stützpunkte“ für die Werte im Messbereich, an denen ein Messmittel rückgeführt wurde.



## 1.3 ANTWORTEN

### 1.3.1 Fragestellung: Rückführbarkeit

---

*»Beeinflusst die Interpolation die Rückführbarkeit an den interpolierten Zwischenwerten?«*

Die Frage ist mit „Nein“ zu beantworten. Die Rückführbarkeit wird durch die Interpolation nicht beeinflusst, da das Einbringen entsprechender Beiträge in der Budgetbildung möglich ist. Beeinflusst wird die zugeordnete Messunsicherheit.

### 1.3.2 Fragestellung: Zulässigkeit unter Einbringung entsprechender Beiträge

---

*»Ist die Interpolation über einen Parameter (also mit einer variablen Eingangsgröße  $x$ ) wie z.B. Spannung, Frequenz, Widerstand als  $y = f(x)$  bei Berücksichtigung der dadurch entstehenden Abweichung an den Kontrollwerten zulässig indem z.B. die wahrscheinliche Interpolationsabweichung als Unsicherheitsbeitrag in der Messunsicherheitsbilanz berücksichtigt wird?«*

„Ja“. Die Interpolation ist zulässig. Ein entsprechender Beitrag ist abzuschätzen und zu berücksichtigen, da er während der Messwertermittlung auftritt und verlässlich beschrieben werden kann.<sup>2</sup>

In keiner Grundlegendokumentation wird ein Messverfahren ausgeschlossen, dessen Unsicherheitsbeiträge abgeschätzt werden können. Erst wenn Abschätzungen versagen, ist die Messung nicht rückführbar und somit wertlos.

---

<sup>2</sup> Die Zulässigkeit lässt sich auch aus JCGM 100:2008, lfd.Nr. 3.1.2 (f) herleiten, worin die Messung als Schätzung mit Unsicherheit bezeichnet wird. Die Einflüsse sollen komplett berücksichtigt werden („with sufficient completeness“).



## 2 BEISPIEL EINER INTERPOLATION

Nachfolgendes Beispiel zeigt eine manuell durchgeführte Interpolation auf der Basis der Stützpunkte einer Rückführung und den Umgang mit der Messunsicherheit.

### 2.1 BESCHREIBUNG DER MESSAUFGABE: EINFÜGEDÄMPFUNG

Der Parameter HF-Einfügedämpfung wird in der beschriebenen Form seit dem Jahr 2000 im Bereich des Kalibrierzentrums der Bundeswehr unter Anwendung aller wirtschaftlich und zeitlich vertretbarer Maßnahmen zur Reduktion von Messunsicherheiten an koaxialen Komponenten und Hohlleiter angewendet. Die Interpolation ist eine dieser Maßnahmen. Der Parameter wurde mit dem vorgestellten Messprozess<sup>3</sup> und -verfahren in dieser Form akkreditiert<sup>4</sup>.

Der Messplatz besteht auf einem Vektor-Network Analyzer, dem zugehörigen Generator und einem Test Set mit Richtkopplern und Detektoren<sup>5</sup>. Ergänzt werden die Messmittel durch speziell selektierte Messhilfsmittel.

Der Prüfling und ein Normal werden sechs Mal bei unterschiedlichen Drehstellungen im Zyklus 0-N-P-P-N-0 vermessen, wobei „0“ für die durchverbundene Leitung steht und einen definierten Bezugspegel<sup>6</sup> liefert. Die Messgröße wird als Mittelwert der mehrfachen Zyklusmessung, unterschieden nach den jeweiligen Betriebsrichtungen, als komplexe Größe ermittelt und im hier beschriebenen Falle skalar ausgewertet. Die Ermittlung der Messgröße folgt der Prozessgleichung:

$$A = A_{NWAP} - A_{NWAN} + A_{Richtig} = \frac{\sum_{i=1}^n (-(A_{N1} - A_{P1}) + (A_{P2} - A_{N2}))}{2 \cdot n} + A_{Richtig}$$

Gleichung 2-1: Prozessgleichung der Dämpfungsmessung<sup>7</sup>

<sup>3</sup> Entwicklung des Messprozesses: Bernd Pesch, Validierung: Falko Rampolt

<sup>4</sup> Begutachtung im Rahmen der Akkreditierung: Dr. Stumpe, Dr. Janik

<sup>5</sup> Bei dieser Messgröße wird bewusst ein „uralter“ Wiltron 360 Arbeitsplatz genutzt, weil er eine hervorragende Stabilität liefert.

<sup>6</sup> Normalerweise ist im N-P-P-N Zyklus die Nullmessung nicht notwendig, da die Messgröße aus der Differenz zwischen Prüfling und Normal ermittelt wird. Die Ergänzung um ein definiertes Null bietet jedoch viele Vorteile bei der Bewertung des Messplatzes („Tagesform“). So kann das Rauschniveau der Messung bestimmt werden, oder aus der Differenz Normal – Null eine Linearitäts- und Driftaussage hergeleitet werden.

<sup>7</sup> Die Darstellung und Positionierung der Ablesewerte der Dämpfung im Zähler des Bruchs steht für die Reihenfolge im Messzyklus.



mit:

$A$	Mittelwert der gemessenen Dämpfungsdifferenz Prüfling-Normal
$A_{NWAP}$	Messwert der Dämpfung des Prüflings
$A_{NWAN}$	Messwert der Dämpfung des Bezugsnormals (ggf. als Reihenschaltung mehrerer Normale)
$A_{N1}, A_{N2}$	Messwerte des jeweils gleichen Normals im Zyklus. Die Zusatzindizes 1 und 2 kennzeichnen die erste und zweite Messung des Normals innerhalb eines Zyklus.
$A_{P1}, A_{P2}$	Messwerte des jeweils gleichen Prüflings im Zyklus. Die Zusatzindizes 1 und 2 kennzeichnen die erste und zweite Messung des Prüflings innerhalb eines Zyklus.
$A_{Richtig}$	Richtiger Wert des Bezugsnormals gemäß PTB-Kalibrierschein

## 2.2 RÜCKFÜHRUNG DER STÜTZPUNKTE

Die Rückführung der Messgröße Einfügedämpfung (Dämpfung einer Hochfrequenzleistung über ein gegebenes Frequenzband) erfolgt mittels Einfügedämpfungsglieder als „Maßverkörperung“. Diese sind in ihrer Verkörperung der Messgröße stark frequenzabhängig. Die Messgröße ist zeitlich stabil und sehr gut reproduzierbar.. Die Realisierung jedes einzelnen Frequenzpunktes ist mit Aufwand und Kosten verbunden. Das Bestreben ist es, mit möglichst wenigen Stützpunkten auszukommen. Wir Beschränkung uns im Beispiel auf das Band Gleichspannung bis 18 GHz. Ein typisches Stützpunktraster wäre:

DC, 10 MHz, 20 MHz, 50 MHz, 100 MHz, 200 MHz, 500 MHz, 1 GHz, 2 GHz bis 18 GHz in 2 GHz-Schrittweite.

Aus historischen Gründen (spezielle, allgemeine Anforderungen und Kundenforderungen) sind weitere Frequenzpunkte von besonderem Interesse (Beispiele):

FREQUENZ	ANWENDUNG
30 MHz	Zwischenfrequenz verschiedener Dämpfungsmesssysteme <sup>8</sup>
800 MHz und 1,9 GHz	Bandumschaltung mancher Mischer)
1,4 GHz, 1,6 GHz	GPS-Trägerfrequenz
9,... GHz	Cs-Atomfrequenznormal
...	

Tabelle 2-1: Typische Frequenzprüfpunkte

<sup>8</sup> Kann nicht mit o.a. Messanordnung realisiert werden und wird skalar mittels thermischer Leistungsmessung ermittelt.



Das Messsystem liefert bei diesen Frequenzen Ablesewerte, ohne sich dort auf Stützpunkte des Normals beziehen zu können. Bei diesen Frequenzen interpolieren wir die Kennlinie des Normals<sup>9</sup>.

### 2.2.1 Favorisierte Interpolation

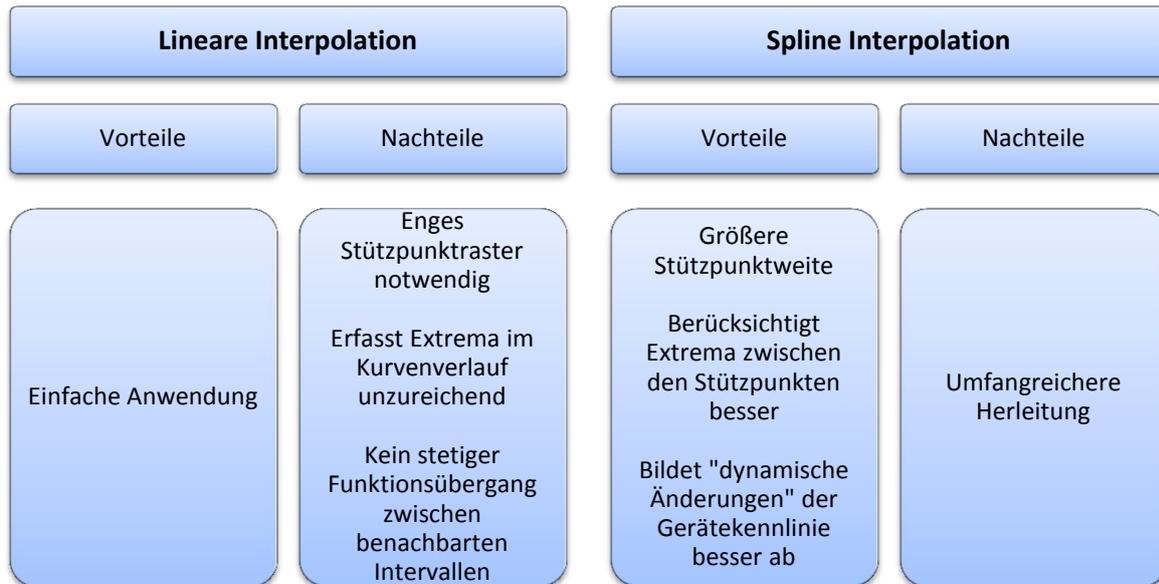


Abbildung 2-1: Wahl des Interpolationsverfahrens

Gewählt wurde die Spline-Interpolation. Hierbei wird in jeweils zwischen zwei Stützpunkten ein Polynom dritter Ordnung zur Beschreibung des vermuteten Verlaufs der Eigenschaften des Normals angesetzt. Je benötigtem Abschnitt sind die Parameter  $a_0$  bis  $a_3$  eines Polynoms...

$$A(f_n, f_{IT}, f_{n+1}) = a_3 f^3 + a_2 f^2 + a_1 f + a_0$$

Gleichung 2-2: Polynom der SplineInterpolation

...zu bestimmen.

<sup>9</sup> Interpolationen können sich prinzipiell auf drei Größen im Rahmen einer Messung beziehen: a) wie hier beschrieben auf das Normal, b) auf die Eigenschaft der Messanordnung beim Transfer (wird stillschweigend durch die Messanordnung selbst gemacht), oder c) nachträglich bei den ermittelten Werten des Prüflings über die Stützpunkte der Prüflingskalibrierung. Variante a liefert die besten Ergebnisse, da man sich hier auf ein bekanntes Normal unter bekannten Laborbedingungen mit bekannten Interpolationsverfahren verlässt.



Mit:  $f$  für die Frequenz in GHz  
 $A(f)$  für die Dämpfung bei dieser Frequenz.  
 $f_n$  ist die Frequenz des letzten Stützpunktes unter der aktuell zu betrachtenden Frequenz  
 $f_{it}$  ...zu der die Dämpfung zu interpolieren ist.  
 $f_{(n+1)}$  ist die Frequenz des ersten Stützpunktes oberhalb der Interpolationsfrequenz.

Es werden vier Bestimmungsgleichungen benötigt, wobei sich zwei auf die Wertepaare  $(f_n, A(f_n))$  und  $(f_{(n+1)}, A(f_{(n+1)}))$  in Gleichung 2-2 direkt stützen. Die weiteren Gleichungen werden aus dem Ansatz der Stetigkeit der ersten Ableitungen der stückweisen Interpolation an den Stützpunkten gewonnen. Hierbei wird berücksichtigt, dass sich der Ergebnisraum  $A_{IT} = A_{IT}(f)$  aus stetigen Funktionen zusammensetzt, welche an den Kalibrierpunkten gemeinsame Übergangspunkte und identische Steigungsmaße haben. Da ohne bekannte Funktion die Ableitungen nicht definierbar sind, behilft man sich durch Bildung der mittleren Steigungsmaße (Differenzenquotienten) in den jeweils benachbarten Abschnitten um  $f_n$  und  $f_{(n+1)}$ .

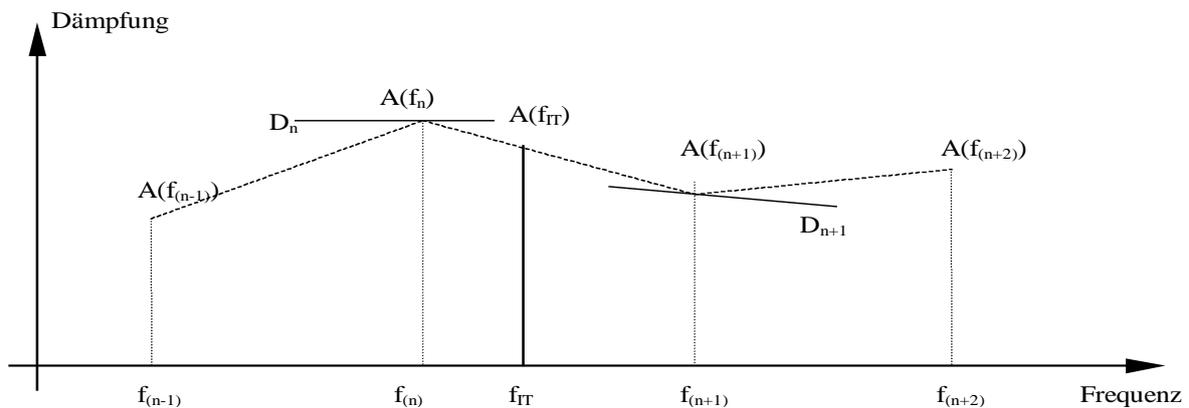


Abbildung 2-2: Darstellung der Interpolationsgrößen

$$A'(f) = 3a_3 f^2 + 2a_2 f + a_1$$

Gleichung 2-3: Ableitung des Interpolationspolynoms



## 2.2.2 Lösung des Gleichungssystems

Zu lösen ist dann folgendes System:

$$\begin{pmatrix} A_n \\ A_{(n+1)} \\ D_n \\ D_{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f_n^3 \\ f_n^2 \\ f_n^1 \\ f_n^0 \\ f_{(n+1)}^3 \\ f_{(n+1)}^2 \\ f_{(n+1)}^1 \\ f_{(n+1)}^0 \end{pmatrix}$$

Gleichung 2-4: Bestimmungsmatrix der Interpolationsparameter

## 3 MESSUNSICHERHEITSBEITRAG DER INTERPOLATION

Intervallzwischenwerte werden mittels der oben angegebenen, modifizierten Spline-Interpolation bestimmt. Zur Ermittlung der Kenngröße „Messunsicherheitseinfluss“ muss eine verlässliche Aussage zur Differenz zwischen der unbekanntes, realen Kennlinie des Messmittels und Interpolation getroffen werden. In der Regel nutzt man hierzu Schätzwerte auf der Basis von Erfahrungen.

### 3.1 DER KLASSISCHE ANSATZ

Am Beispiel der linearen Interpolation wird gezeigt, worin die Grenzen der Behandlung mittels GUM Framework zu sehen sind.

Ausgehend von der Geradengleichung  $y = mx + b$  lässt sich mit Hilfe der Punkte  $y_1 = f(x_1)$  und  $y_2 = f(x_2)$  die Zwei-Punkte Form der Gerade und somit die Interpolationsgleichung erstellen:

$$y_{Int} = y_1 + \frac{x_{Int} - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (y_2 - y_1)$$

Gleichung 3-1: Zwei Punkte Form der Gerade (zugleich Interpolationsgleichung)



Im Folgenden nutzen wir für die Lage des interpolierten Wertes folgende Kurzform:

$$Pos = \frac{x_{Int} - x_1}{x_2 - x_1}$$

Gleichung 3-2: Lage im Interpolationsintervall

mit  $0 < Pos < 1$ .

Betrachten wir obige Funktion als Prozessgleichung, dann wäre für die Interpolation folgende Modellgleichung zu erstellen:

$$y_{Int} = y_1 + Pos \cdot (y_2 - y_1) + \delta_{Int}$$

Gleichung 3-3: Ansatz einer Modellgleichung zur Interpolation

Hierbei sind messunsicherheitsbehaftet:

- $y_1$  Funktionswert (Messergebnis) am Punkt  $x_1$ . Dem Funktionswert wird als Einflussgröße  $e_1$  die Messunsicherheit der Stützpunktmessung  $U_{0,95}(y_1)$  zugeordnet.
- $y_2$  dto., jedoch für den Messwert bei  $x_2$ .
- $\delta_{Int}$ .

Die beiden Funktionswerte  $y_1$  und  $y_2$  sind hochgradig korreliert. Die Unsicherheitseinflüsse der Festlegung der  $x$ -Lage der Stützpunkte sei (in diesem Beispiel) irrelevant klein.

Die partiellen Ableitungen sind:

$$c_{y_1} = \frac{\partial y_i}{\partial y_1} = 1 - Pos$$

Gleichung 3-4: ###

$$c_{y_2} = \frac{\partial y_i}{\partial y_2} = Pos$$

Gleichung 3-5: ###

$$c_{Int} = \frac{\partial y_i}{\partial \delta_{Int}} = 1$$

Gleichung 3-6: ###



Für ein typisches Budget aus den drei Einflussgrößen  $e_1 = U(y_1)$ ,  $e_2 = U(y_2)$  und  $e_{Int} = u(\delta_{Int})$  berücksichtigt man die Normalverteilung der Einflussgrößen  $y_1$  und  $y_2$ , sowie einen Anteil der Schätzung für  $e_{Int}$  mit Rechteckverteilung<sup>10</sup>. Als Budgetgleichung wäre zu bestimmen:

$$U_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}} \cdot c_1 \cdot e_1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G_2}} \cdot c_2 \cdot e_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot e_{Int}\right)^2 + 2 \cdot \rho_{1,2} \cdot \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{1}{\sqrt{G_2}} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot e_1 \cdot e_2}$$

$$U_k = k \cdot \sqrt{(1 \cdot (1 - Pos) \cdot e_1)^2 + (1 \cdot Pos \cdot e_2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot e_{Int}\right)^2 + \dots (Korrelation)}$$

Gleichung 3-7: ###

In Abhängigkeit von der Lage des Interpolationspunktes  $x_i$  im Intervall  $x_1 < x_i < x_2$  verschiebt sich die Gewichtung der Unsicherheiten zwischen  $u_1$  und  $u_2$ . In der Regel kann bei benachbarten Messpunkten im gleichen Messintervall davon ausgegangen werden, dass  $u_1 \approx u_2$  gilt (gleiche Messbedingungen, gleicher Messprozess, Korrelationskoeffizient  $\rho$  nahe 1). In der Praxis wird man dann feststellen, dass die Behandlung nach dem GUM Framework nicht funktionieren kann, weil die beiden Einzelmessungen zu  $y_1$  und  $y_2$  wie eine Wiederholungsmessung gesehen werden. Dies führt zu einer Reduktion der Messunsicherheit um bis zu  $1/\sqrt{2}$  in Intervallmitte bei unkorrelierter Betrachtung.

Begründung: In Abhängigkeit von der Lage  $Pos$  gilt (bezogen auf die Werte der Sensitivitätskoeffizienten:

$$\sqrt{Pos^2 + (1 - Pos)^2} \leq 1$$

Gleichung 3-8: ###

Nun ist es formal durchaus begründbar, dass man durch eine indirekte Messung links und rechts vom eigentlichen Messpunkt und beidseitiger Annäherung kleinere Messunsicherheiten erzielen kann.

Aber in der Praxis halte ich diesen Ansatz für falsch, weil die Eigenheiten der Interpolation über einen unbekanntem Kurvenverlauf durchgeführt wird, der hier als linear idealisiert wird. Und eben diese Voraussetzung ist nicht gegeben.

Es ist auch keine Lösung, den in

<sup>10</sup> Hier steht bewusst  $e_{\#} = U(y_{\#})$ , da Als Einflussgröße die um  $1/k$  korrigierten Ergebnisse Der Budgets zu den Stützpunkten stehen.



## 3.2 EINE LINEARITÄTSABSCHÄTZUNG DER INTERPOLATION

Der Messunsicherheitseinfluss einer Interpolation ist der Größe „Linearität eines Messmittels“ vergleichbar und könnte entsprechend als Schätzgröße mit Rechteckverteilungen in ein Budget übernommen werden. Dieses statische Verfahren liefert feststehende Messunsicherheitsbeiträge unabhängig davon, ob man auf einem Stützpunkt, nahe daran, oder weiter von diesen entfernt den Interpolationswert ermittelt. Da die Rechteckverteilung derart groß gewählt werden muss, dass sie „als Hüllkurve“ diese Fälle alle beinhaltet, ist sie immer nur als „Worst Case“ Abschätzung zu sehen.

## 3.3 ALTERNATIVE BEHANDLUNG DER MESSUNSICHERHEIT DER INTERPOLATION

Bei dem hier beschriebenen Verfahren kommt eine andere Bewertung des Messunsicherheitseinflusses „Interpolation“ zur Anwendung. Wir betrachten folgende Annahmen:

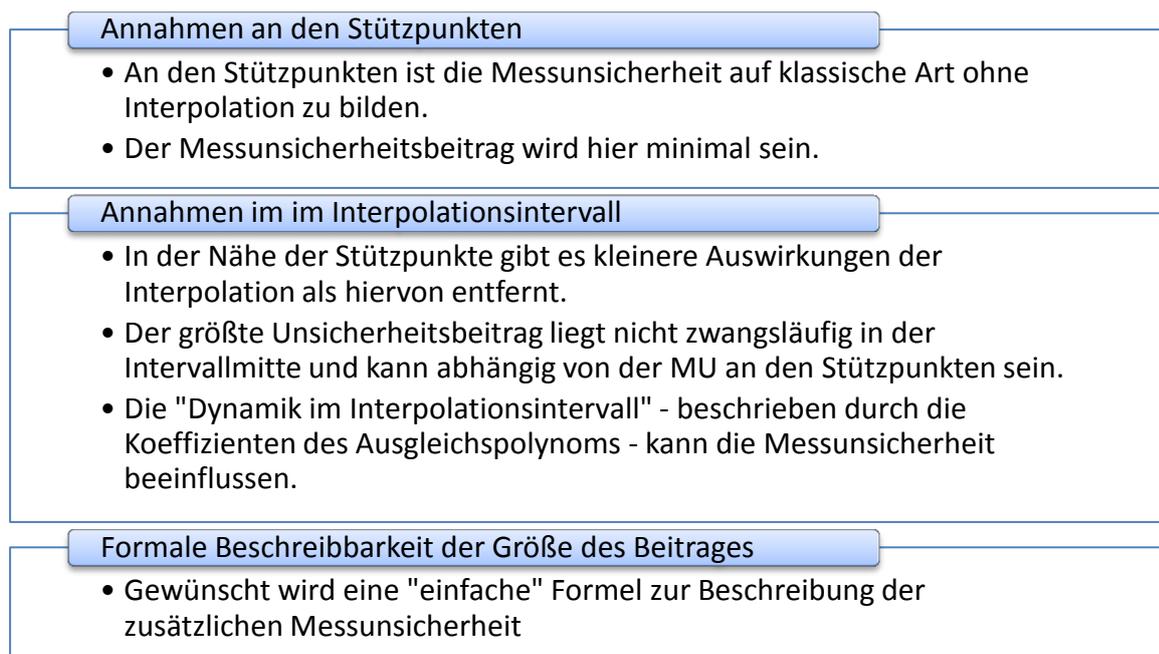


Abbildung 3-1: Forderung an die Beschreibung des Messunsicherheitseinflusses.

Kerngedanke in der Bewertung des Messunsicherheitsbeitrags der Interpolation ist nun, dass dieser wachsen muss, je weiter man sich von den bekannten Stützpunkten entfernt. Irgendwo zwischen den Stützpunkten soll man dann das Maximum des zusätzlichen Messunsicherheitseinflusses erwarten können. Um dieses Verhalten numerisch kalkulierbar darstellen zu können, empfiehlt es sich, die Messunsicherheit der Interpolation durch eine stetige Funktion



zu beschreiben. Wichtigste Einflussgrößen in diese Berechnung sind die ermittelten erweiterten Messunsicherheiten an den Stützpunkten des Polynoms.

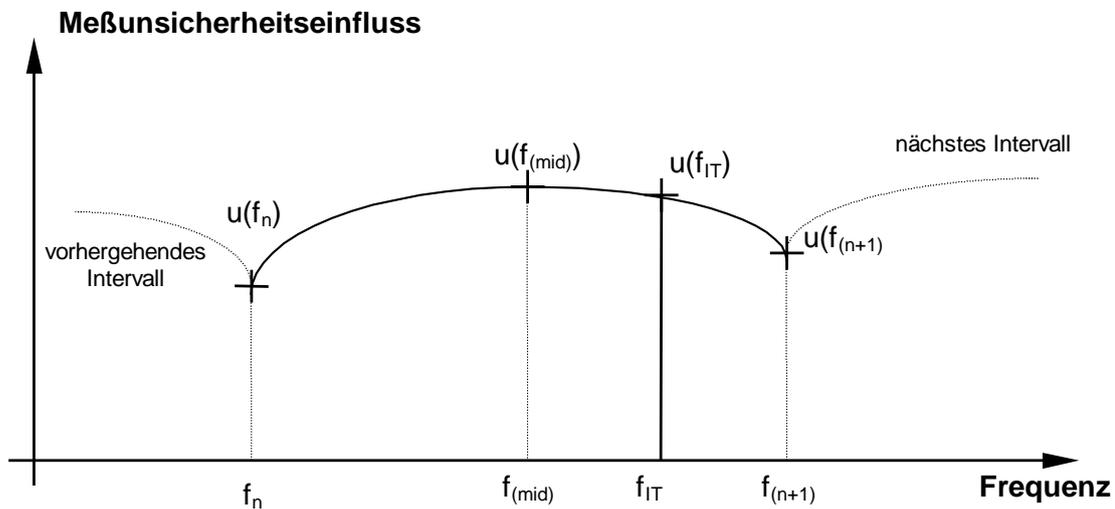


Abbildung 3-2: Unsicherheitseinfluss der Interpolation

Hier könnte man ein Polynom zweiter Ordnung zur Beschreibung der Unsicherheit der Interpolation ansetzen:

$$e(f_{IT}) = e_2 f_{IT}^2 + e_1 f_{IT} + e_0$$

Gleichung 3-9: Ansatz für das Unsicherheitspolynom

Mit:  $e$  für den numerischen Beitrag der Einflussgröße  
 $f_{IT}$  für die Interpolationsfrequenz in den Grenzen zwischen  $f_n$  und  $f_{n+1}$ , an denen das Interpolationsintervall durch Stützpunkt begrenzt ist

Das Polynom ist eindeutig bestimmbar mit den Punkten  $e(f_n) = 0$  und  $e(f_{n+1}) = 0$ , sowie einem formabhängigen, zu bestimmenden Maxima im Interpolationsintervall ( $e_{max}, f_{max}$ ).

Die Lage des Maximums ist nicht konkret bestimmbar. Hierzu sind zu abzuschätzende Annahmen einzubringen die empirisch validiert<sup>11</sup> werden müssen. Die einfachste Annahme ist,  $f_{max}$  mittig zwischen  $f_n$  und  $f_{n+1}$  zu legen und einen Formfaktor  $\kappa$  zu wählen, der die Größe des Maximums festlegt<sup>12</sup>. Die mittige Festlegung wurde später als nicht sinnvoll bewertet.

<sup>11</sup> Wir zeigen später, wie man im Rahmen der Validierung das Polynoms mittels bekannter Werte einmalig verifiziert und dann als validiert für weitere Anwendungen betrachten kann.

<sup>12</sup> Diesen Ansatz haben wir auch zunächst gewählt und im Rahmend der Validierung verworfen. Hier bleibt unberücksichtigt, dass es durchaus einen Einfluss hat, ob die Messunsicherheiten an den Stützpunkten gleich groß sind, oder



Stattdessen wurde ein Ansatz gewählt, der sich hier bewusst von der Bestimmungsmethode nach dem klassischen GUM Framework löst:

Wir bestimmen zunächst auf der Basis des Frameworks die Messunsicherheit für die interpolationsfreien Messwerte an den Stützpunkten. Um wie viel größer die maximale Unsicherheit der Interpolation anzusetzen ist, soll wiederum durch ein Polynom zweiter Ordnung beschrieben werden. Nun jedoch legen wir das Polynom über andere Kenngrößen fest:

$$e(f_n) = u(f_n), e(f_{n+1}) = u(f_{n+1})$$

Gleichung 3-10: Festlegung zweier Punkte des Polynoms

Mit:  $u(f_n), u(f_{n+1})$

für die ermittelten Messunsicherheiten der Messung an den Stützpunkten

Der Formfaktor  $\kappa$  wird aus dem geometrischen Mittel von  $u(f_n)$  und  $u(f_{n+1})$  wie folgt festgelegt:

$$\kappa = V \cdot \sqrt{u_{f_n}^2 + u_{f_{n+1}}^2}$$

Gleichung 3-11: Formfaktor des Unsicherheitspolynoms, zugleich Maximum der Messunsicherheit im Interpolationsintervall

Mit:  $V$  für einen Erweiterungsfaktor, der sich aus der Validierung des Verfahrens ergibt.

---

unterschiedliche Werte aufweisen. Eine Messung, die bereits am Stützpunkt unsicherer ist muss auch dort einen größeren Beitrag der Interpolation aufweisen, da sie dort „unsicherer verankert“ werden kann.

---

Die in dieser Dokumentation dargestellten Messwerte sind reale Beispiele eines Auftraggebers. Die Weitergabe des Dokumentes ist – auch auszugsweise - ohne Zustimmung des Erstellers untersagt.  
Das Dokument darf nur zu internen Zwecken des DAkkS verwendet werden.



## BEISPIELE

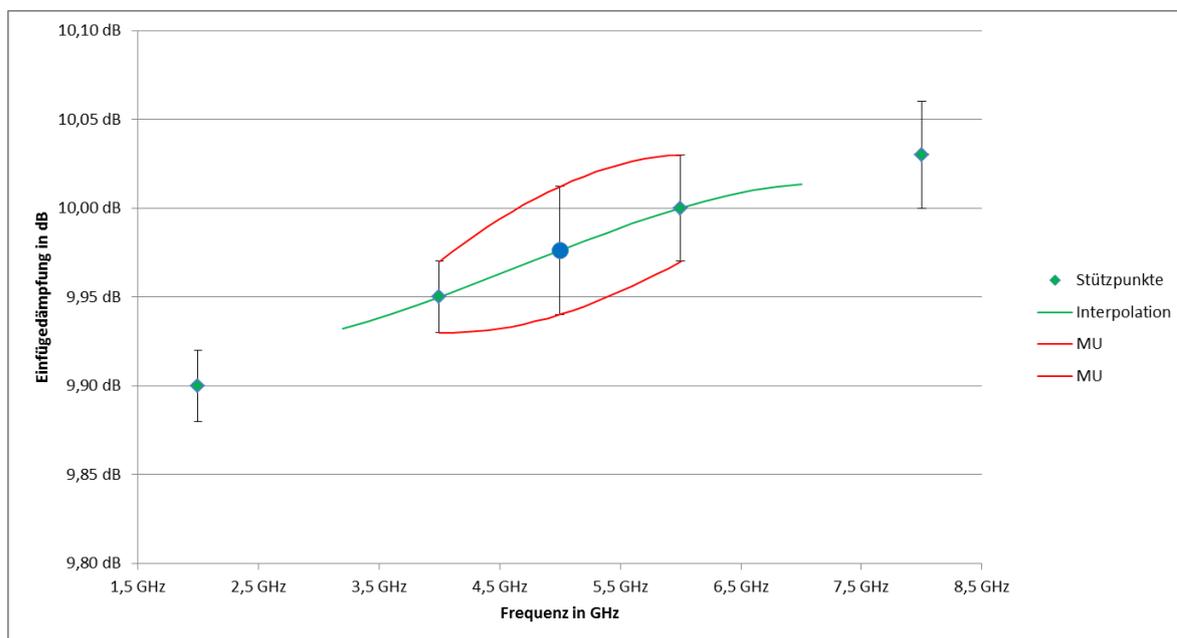


Abbildung 3-3: Beispiel (I) einer Interpolation

RAHMENDATEN	STÜTZPUNKTE	MESSWERT	MESSUNSICHERHEIT
n-1	2,0 GHz	9,90 dB	0,020 dB
n	4,0 GHz	9,95 dB	0,020 dB
IT	5,0 GHz	9,98 dB	0,036 dB
n+1	6,0 GHz	10,00 dB	0,030 dB
n+2	8,0 GHz	10,03 dB	0,030 dB
Formfaktor	V	1	

Tabelle 3-1: Beispiel (I) einer Interpolation

Im Intervall 4 GHz bis 6 GHz soll ein Messwert für 5 GHz interpoliert werden. Das Beispiel zeigt ein relativ lineares Steigen der Kennlinie unter Einbeziehung der umgebenden Intervalle. Die dargestellte Spline Interpolation ist nur zwischen 4 GHz und 6 GHz gültig.

Die Stützpunkte haben verschieden große Messunsicherheiten<sup>13</sup>. Die Unsicherheit des interpolierten Wertes ist um 20% größer als die größere Messunsicherheit der Stützpunkte.

<sup>13</sup> Bei dieser Bewertung der (nachträglichen) Interpolation ist es gleichgültig, wann die Messunsicherheit erweitert wird. Wir gehen hier bereits von erweiterten Messunsicherheiten aus. So entsprechen die Werte der Stützpunkte den tabellierten Werten im Kalibrierschein.

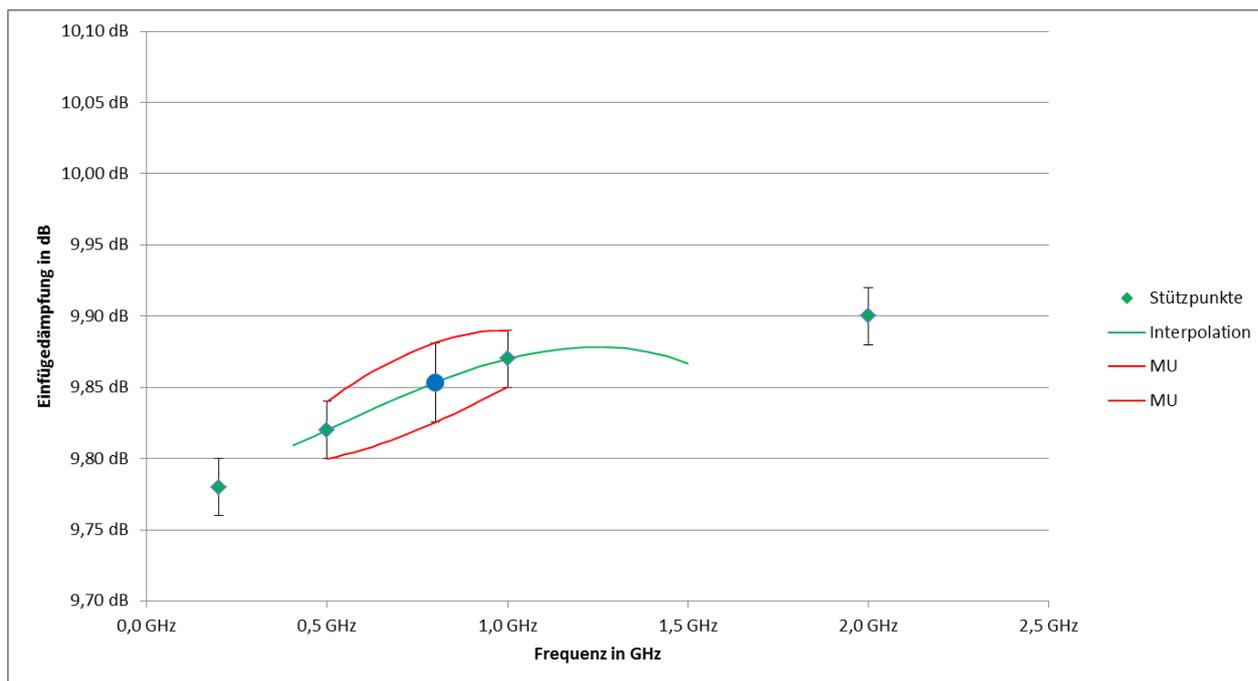


Abbildung 3-4: Beispiel (II) einer Interpolation

RAHMENDATEN	STÜTZPUNKTE	MESSWERT	MESSUNSICHERHEIT
n-1	0,2 GHz	9,78 dB	0,020 dB
n	0,5 GHz	9,82 dB	0,020 dB
IT	0,8 GHz	9,85 dB	0,028 dB
n+1	1,0 GHz	9,87 dB	0,020 dB
n+2	2,0 GHz	9,90 dB	0,020 dB
Formfaktor	V	1	

Tabelle 3-2: Beispiel (II) einer Interpolation

Im diesem Falle haben beide Stützpunkte die gleiche Messunsicherheit. Mit dem Formfaktor<sup>14</sup>  $V = 1$  liegt in der Intervallmitte die Messunsicherheit bei  $\sqrt{2} \cdot u_n$ .

<sup>14</sup> Wir haben diverse Fälle untersucht und validiert. In der Praxis hat sich dann gezeigt, dass wenn man das Stützpunktraster hinreichend eng wählt, man mit  $V = 1$  die Erweiterung der Messunsicherheit des Verfahrens gut beschreibt.

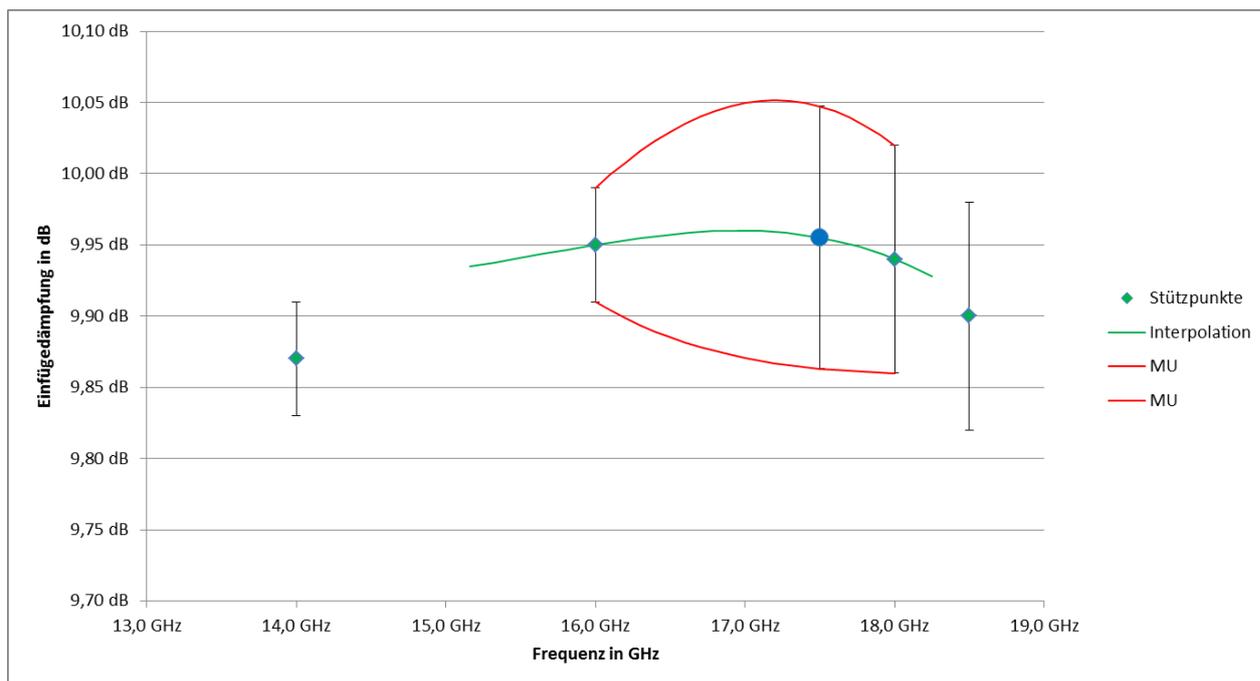


Abbildung 3-5: Beispiel (III) einer Interpolation

RAHMENDATEN	STÜTZPUNKTE	MESSWERT	MESSUNSICHERHEIT
n-1	14,0 GHz	9,87 dB	0,04 dB
n	16,0 GHz	9,95 dB	0,04 dB
IT	17,5 GHz	9,96 dB	0,09 dB
n+1	18,0 GHz	9,94 dB	0,08 dB
n+2	18,5 GHz	9,90 dB	0,08 dB
Formfaktor	V	1	

Tabelle 3-3: Beispiel (III) einer Interpolation

Nun steigt der Kurvenverlauf im Intervall vor dem Interpolationsintervall und fällt wieder im folgenden Intervall. Hier muss ein (lokales) Extremum im Interpolationsintervall liegen. Mit einer linearen Interpolation würde man definitiv ein deutlich schlechter approximiertes Ergebnis angeben (hier: 9,945 dB anstatt 9,96 dB). Wäre die erweiterte Messunsicherheit – insbesondere bei 18 GHz – geringer, bestände die Gefahr, dass durch die Interpolation das Messunsicherheitsintervall verlassen wird.



## 4 VALIDIERUNG DER INTERPOLATION UND DER ZUGEORDNETEN MESSUNGSICHERHEIT

Die Validierung des Verfahrens stützt sich zunächst auf eine breitere Ausgangsbasis gesicherter Messwerte ab. Hierzu wurde ein Satz Normale an gewünschten Stützpunkten, aber auch an jeweils mindestens einem Zwischenwert zwischen den später geplanten Stützpunkten kalibriert. So lag in einem Falle folgende Kette an Stützpunkten vor:

NR	STÜTZPUNKT
1	DC
2	10 MHz
3	20 MHz
4	30 MHz
5	50 MHz
6	100 MHz
7	200 MHz
8	500 MHz
9	1 GHz
10	1,5 GHz
11	1,9 GHz
12	2 GHz

NR	STÜTZPUNKT
13	3 GHz
14	4 GHz
15	5 GHz
16	6 GHz
17	8 GHz
18	10 GHz
19	12 GHz
20	12,4 GHz
21	14 GHz
22	16 GHz
23	18 GHz

Tabelle 4-1: Typische Frequenzprüfpunkte

In einem ersten Durchgang wurden die Frequenzpunkte mit ungeraden laufenden Nummern als Stützpunkte angenommen und an den jeweils anderen Punkten wurden Messwerte interpoliert und anschließend mit den bekannten Werten an gleicher Stelle verglichen. Im zweiten Falle wurden die Rollen getauscht.

Für die Bewertung der Qualität der Interpolation und Festlegung des Validierungsfaktors  $V$  wurden die Ergebnisse mittels Normalized Error Ratio ausgewertet. Hierbei wurde  $V$  jeweils so variiert, bis mindestens jeweils 10 von 11 Werte die Bedingung  $E_n \leq 0,5$  erfüllten.



DATUM	10. NOVEMBER 2011
REVISION	1.0
DOKUMENT	OHNE
SEITE	18 VON 18

Die Teilnahme am DKD-Ringvergleich Dämpfung 2006 lieferte eine Bewährungsprobe für das Verfahren<sup>15</sup>. Alle  $E_N$ -Werte lagen im Bereich unter 0,5 und bestätigten die Referenzwerte hochsignifikant<sup>16</sup>.

Verfahrensdetails können gerne persönlich diskutiert werden.

---

<sup>15</sup> Gefordert wurde u.a. die Bestimmung der Einfügedämpfung bei 10,5 GHz. Angewendet wurde eine Interpolation des Normals im Intervall 10 GHz bis 12 GHz.

<sup>16</sup> Wir sprechen von einer hochsignifikanten Bestätigung, falls  $E_N$ -Werte kleiner 0,5 erreicht werden. Ausgehend von einer Angabe der Messunsicherheiten mit einem Vertrauensintervall von 95% liegt hier eine gegenseitige Überdeckung der Vertrauensintervalle mit  $k = 1$  vor. Gefordert werden in der Regel  $E_N$ -Werte kleiner 1,0, was einer gegenseitigen Überdeckung der Messunsicherheiten mit  $k = 2$  entspricht.