Die Messunsicherheit bei Interpolationen und Regressionsfunktionen

Bernd Pesch
Pesch Consult

Messmittel interpolieren für uns

Die „Interpolatoren“ bei der Arbeit

Die meisten Messmittel werden nur an wenigen Punkten zurückgeführt. Aber auch zwischen den Stützpunkten bekommen wir Ablesewerte oder generierte Werte. Diese werden bereits durch die Messmittel interpoliert.

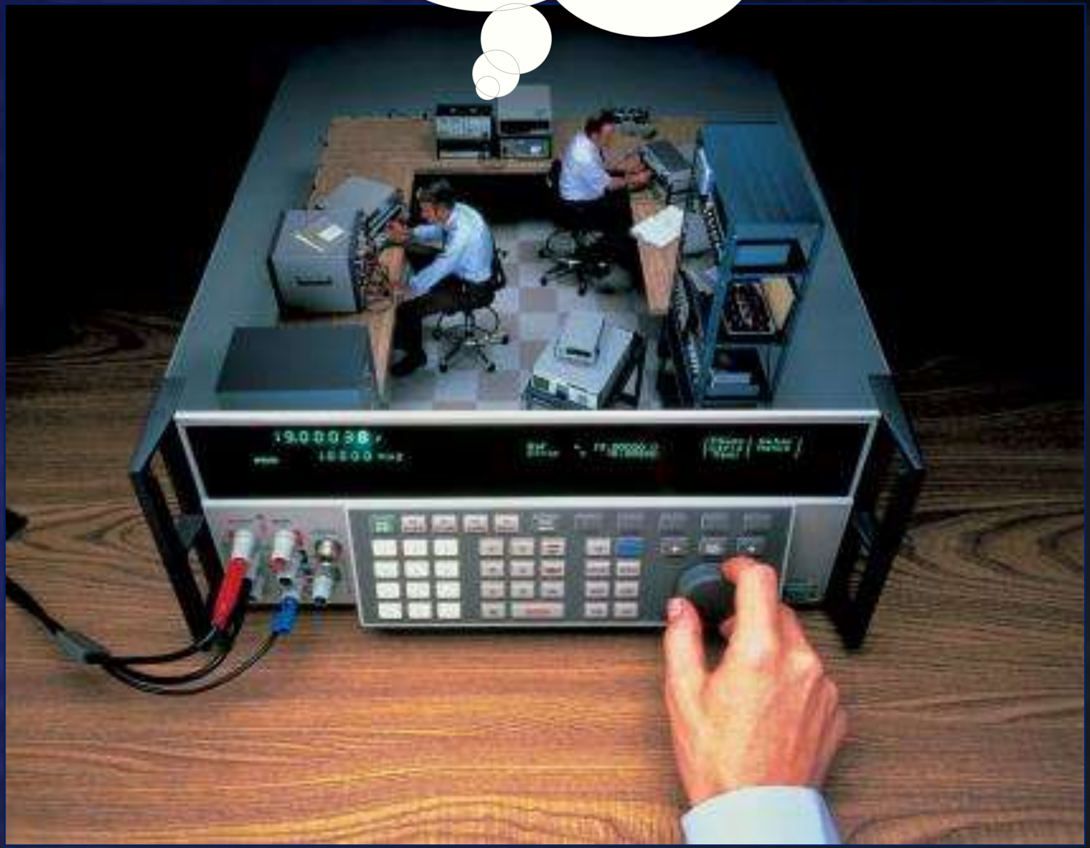


Bild: Fa. Fluke

Basis der Rückführbarkeit interpolierter Messergebnisse

JCGM 200:2012, Pkt 2.3:

Measurand: quantity, intended to be measured

JCGM 200:2012, Pkt 2.6:

Measurement procedure: detailed description of a measurement according to one or more measurement principles and to a given measurement method, based on a measurement model and including any calculation to obtain a measurement result

Folgerung für die Interpolation

- Eine Übertragung der Messunsicherheit direkt gemessener Größen auf eine berechnete Messgröße ist möglich, wenn die notwendigen mathematischen Schritte Teil der Messung sind.

- Für die Interpolation ist ein zusätzlicher Messunsicherheitsbeitrag (beispielsweise als Interpolationsabweichung von der realen Messmittelkennlinie) notwendig.

Ursprünglich aus dem BAM/DAkkS/PTB-Seminar, Braunschweig, März 2012
aktualisiert September 2024

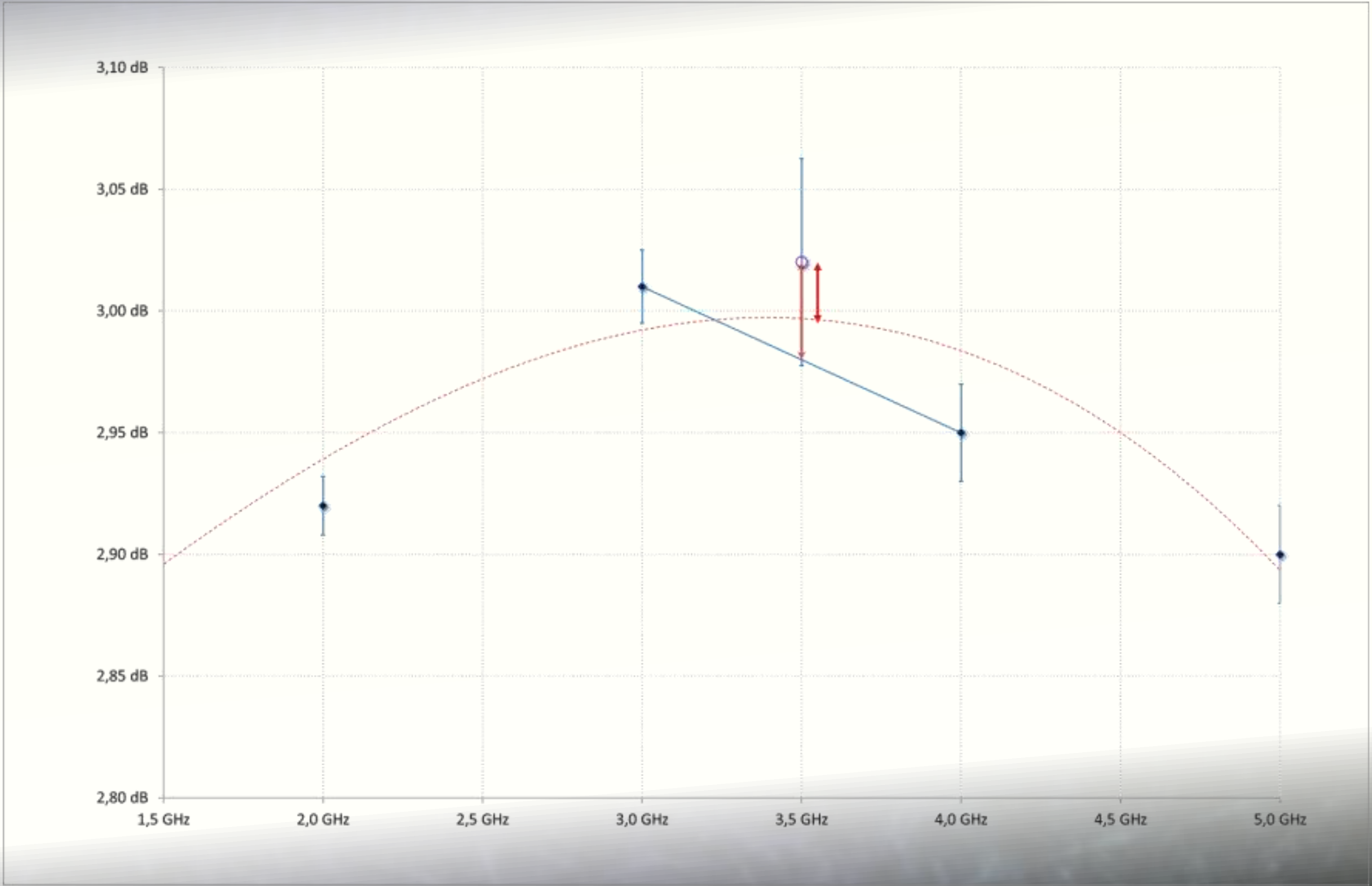
Teil a:

Unsicherheit an singulären Punkten

Singuläres Ergebnis einer Interpolation

Dämpfungsmessung (S21) an einem Netzwerk.

Der Interpolationswert bei einer relevanten Frequenz ist die Messgröße (singuläre Betrachtung).



Einige Regressionsmodelle

- Lineare Interpolation
- Spline Interpolation
- Polynominterpolation(en), auch Lagrange-Interpolation
- Exponentielle, logarithmische, ...

Ermittlung eines Interpolationspunktes inklusive Messunsicherheit

Stützpunkte

Die Messunsicherheit an den Stützpunkten der Regression muss bekannt sein.

↓

Kennlinie

Die Kennlinie des Messmittels muss hinreichend sicher abgeschätzt werden.

↓

Auswahl

Eine geeignete Regressionsfunktion muss gefunden und angepasst werden.

↓

Interpolation

Ein Interpolationswert wird bestimmt.

↓

Messunsicherheit

Eine Messunsicherheit wird dem Interpolationswert zugewiesen.

Beispiel: die lineare Interpolation

Gegeben sind die Stützpunkte der Messung:

$$y_1 = f(x_1) \text{ und } y_2 = f(x_2)$$

Die Interpolation:

$$y_{Int} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_{Int} - x_1) + y_1$$

y_{Int} ist der Messwert des Interpolationsverfahrens, dem eine Unsicherheit zuzuordnen ist.

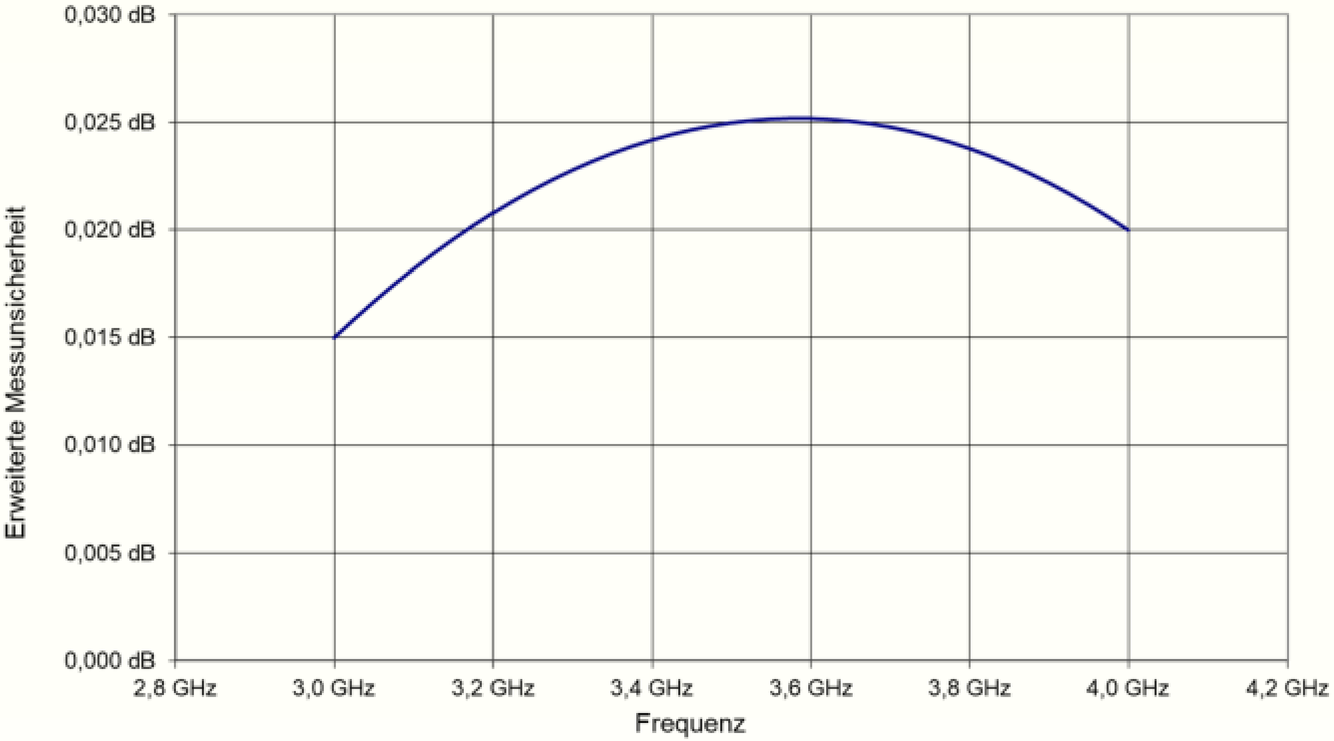
Die Interpolationsgleichung als Modellgleichung

$$y_{Int} = \frac{(y_2 + \delta y_2) - (y_1 + \delta y_1)}{(\mathrm{x}_2 + \delta x_2) - (\mathrm{x}_1 + \delta x_1)} \cdot \left(x_{Int} - (\mathrm{x}_1 + \delta x_1)\right) + (y_1 + \delta y_1) + \delta_{\mathrm{IntAbw}}$$

Korrelationen

Es liegen bei der Ermittlung der Regressionsfunktion Korrelationen zwischen den Stützpunkten vor, sofern beide Stützpunkte nicht unabhängig voneinander ermittelt wurden.

Beispiel zum Verlauf der Messunsicherheit im Interpolationsintervall



Der zusätzliche Messunsicherheitseinfluss ist im Interpolationsintervall nicht konstant, sondern an den Stützpunkten Null und hat ein Maximum abhängig von den Unsicherheiten an den Stützpunkten im Intervall.

Aus den zuvor aufgestellten Forderungen ist eine Parabel zur Beschreibung des zusätzlichen Unsicherheitseinflusses naheliegend.

Der Unsicherheitseinfluss der Interpolation δ_{IntAbw}

Gleichung der Parabel:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{IntAbw}} = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Man benötigt drei Wertepaare:

$$(x_1|0),\ \left(x_{\max}\middle|u_{x_{\max}}\right),\ (x_2|0)$$

Mögliche Abschätzungen:

$$x_{max} = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad u_{x_{max}} := V \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Achtung: Die Annahme ist spekulativ und zu validieren!

Vereinfachungen

Die Bestimmung der Messunsicherheit von Zwischenwerten wendet viele Annahmen an, beispielsweise:

- Die Wahl der Regressionsfunktion ist die erste Annahme.
- Korrelationen in x- wie auch in y-Richtung werden abgeschätzt und ändern sich über das Interpolationsintervall hinweg. Diese Änderungen werden nicht berücksichtigt.
- X-Anteile der Unsicherheit werden als sehr klein angenommen.
- Das Verhalten der möglichen Abweichung von der gewählten Regression wird geschätzt.

Die Validierung der Annahmen ist nicht trivial!

Demonstration der Berechnung

Beispiel

		y	u(x)	$u_y(x)$
x1	3,00 GHz	9,950 dB	1,0E-3 GHz	0,015 dB
Interpolationswert (x int)	3,50 GHz	9,975 dB		
x2	4,00 GHz	10,000 dB	1,0E-3 GHz	0,020 dB
V bei x = 3,5	0,707			0,018 dB

	Varianzen	Einfluss	WDF	√G	c	ν	u	Gew. Anteil (u²)
a	Messwert y(x1) (erweitert: k=2)	0,008 dB	N	1,000	1,500	5,00 E+1	0,011 dB	117 %
b	Messwert y(x2) (erweitert: k=2)	0,010 dB	N	1,000	0,500	5,00 E+1	0,005 dB	23 %
c	Frequenz x1	1,0E-3 GHz	R	0,577	0,050 dB/GHz	9,00 E+99	0,000 dB	0 %
d	Frequenz x2	1,0E-3 GHz	R	0,577	0,025 dB/GHz	9,00 E+99	0,000 dB	0 %
c	Abweichung Interpolation	0,009 dB	D	0,408	1,000	9,00 E+99	0,004 dB	12 %

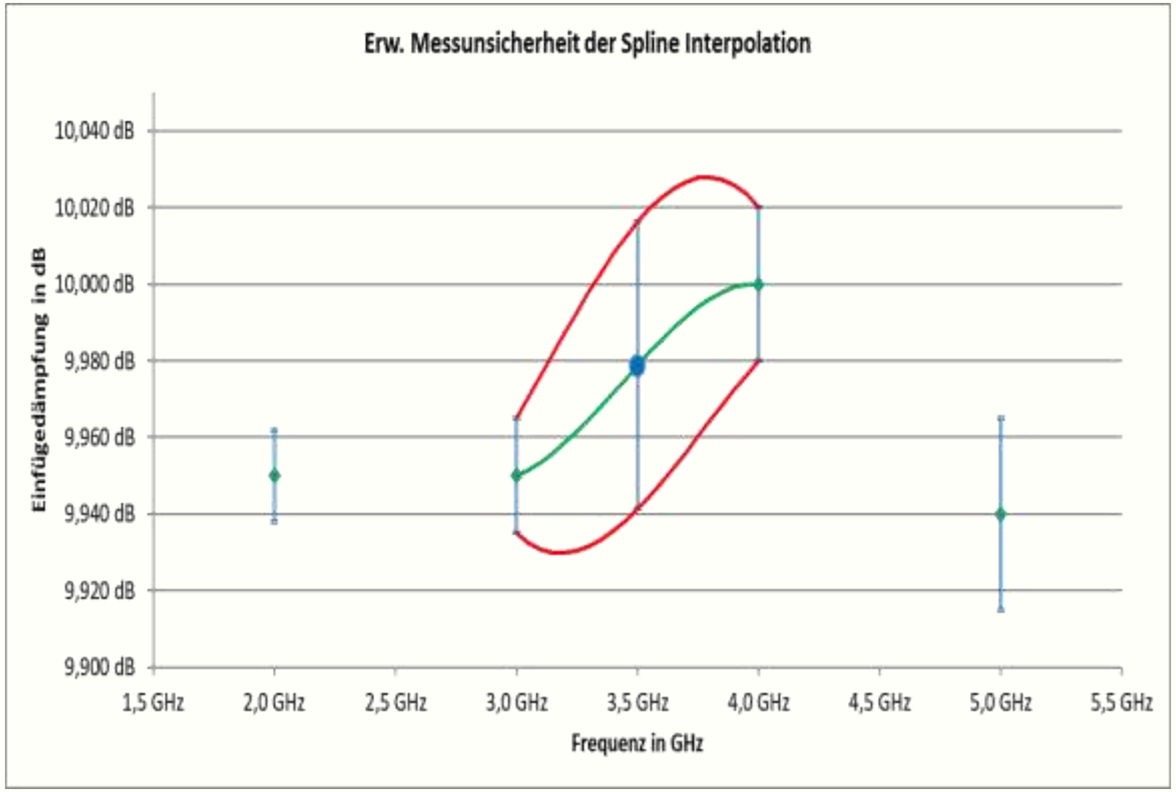
	Kovarianzen			Korr			u	
a,b	y1, y2			-0,500			-0,008 dB	-52 %

Bestimmung der erweiterten Messunsicherheit

	ν	u	
Kombinierte Messunsicherheit (u)	3,5 E+1	0,010 dB	100 %
Erweiterungsfaktor k, gem. Zielwertsuche	2,19		

	ν	U
Erweiterte relative Messunsicherheit ($U_{0,95}$)	5,0 E+1	0,023 dB

Beispiel: MU zur Spline Interpolation nach ähnlichem Verfahren



Charakteristisch ist, wie die Messunsicherheit der Regressionsfunktion folgt und diese auf den (vermutlichen) Verlauf in den Nachbarintervallen reagiert.

Rahmendaten	Stützpunkte	Messwert	Messunsicherheit
n-1	2,0 GHz	9,950 dB	0,012 dB
n	3,0 GHz	9,950 dB	0,015 dB
IT	3,5 GHz	**9,979 dB**	**0,025 dB**
n+1	4,0 GHz	10,000 dB	0,020 dB
n+2	5,0 GHz	9,940 dB	0,025 dB
Formfaktor	V	1	

Spline Interpolation

Teil b:
Interpolationskennlinien

Die Regressionskennlinie ist das Messergebnis

- Es gibt viele Kalibrierscheine, in denen Messgrößen mit (interpolierten) Ausgleichsfunktionen dargestellt werden (Beispiel: Kraftsensoren, Temperatur- und Widerstandskennline von Artefakten).

- Die Kurvenparameter einer Regressionsfunktion bilden (als Vektor) den Messwert.

- Die Darstellung der Polynomparameter erfolgt oft „informativ“ und ohne Zuordnung einer Messunsicherheit zu den Koeffizienten und ist somit kein vollständiges Messergebnis.

Beispiel: Anwendung auf die Koeffizienten einer Kennlinie

Die Kennlinie des barometrischen Drucksensors soll durch ein Polynom zweiter Ordnung beschrieben werden. Der Sensor liefert bei konstanter Referenzspannung einen variablen Gleichstrom:

$$I(P) = a_0 + a_1 P + a_2 P^2$$

Dann ist die Messgröße als Vektor darstellbar, beispielsweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Unsicherheitsvektor:

$$\overrightarrow{u(a)} = \begin{pmatrix} u_{0(a_0)} \\ u_{1(a_1)} \\ u_{2(a_2)} \end{pmatrix}$$

Gleichungssatz

Als Prozessgleichung (ohne Darstellung der Unsicherheitseinflüsse):

$$I_1 = a_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_1^2$$

$$I_2 = a_0 + a_1 \cdot P_2 + a_2 \cdot P_2^2$$

$$I_3 = a_0 + a_1 \cdot P_3 + a_2 \cdot P_3^2$$

Alle Ströme und Druckwerte tragen Unsicherheiten, beispielsweise mit Zuordnung der Interpolationsabweichung bei den Strömen:

$$I_{\#} = I_{\#,Mess} + \delta I_{\#,Kal} + \delta I_{\#,IntAbw} + \cdots$$

$$P_{\#} = P_{\#,Mess} + \delta P_{\#,Kal} + \delta I_{\#,IntAbw} + \cdots$$

Gleichungssatz in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & -P_1 & -P_1^2 \\ 1 & -P_2 & -P_2^2 \\ 1 & -P_3 & -P_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Berücksichtigung der Korrelationen

Alle Strommessungen sind zueinander korreliert (gleiche Messanordnung, Vergleichsbedingungen).

Alle Druckmessungen sind aus gleichem Grunde zueinander korreliert.

Folglich sind auch die ermittelten Polynomkoeffizienten im Ergebnisvektor metrologisch, wie auch aus der mathematischen Verknüpfung miteinander korreliert.

Die Berechnung erfolgt beispielsweise in einer Monte Carlo Simulation mit korrelierten Reihen.

Beispiel eines Ergebnisses

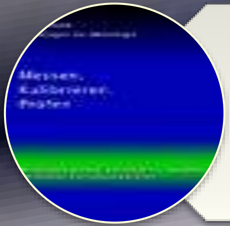
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}763\ \mathrm{mA} \\ 1{,}631 \cdot 10^{-2}\ \dfrac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mbar}} \\ 5{,}446 \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mbar}^2} \end{pmatrix}, \quad U_{0,95} = \begin{pmatrix} 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mA} \\ 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mbar}} \\ 2{,}8 \cdot 10^{-10}\ \dfrac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mbar}^2} \end{pmatrix}$$

Fazit (eigene Meinung)

- Der Aufwand für die Ermittlung der Messunsicherheit eines Kennlinienpolynoms ist erheblich. Die punktweise Betrachtung – wie im ersten Teil gezeigt – ist in vielen Fällen sinnvoller.
- Die Ergebnisse sind stark von der Modellierung und der Bildung der Koeffizienten abhängig. Oft gibt es verschiedene Wege, die Koeffizienten zu bilden. Die Modellgleichung muss der Ermittlung der Koeffizienten entsprechen. Ein geändertes Vorgehen führt zu anderen Unsicherheiten.
- Die Validierung der Abweichung der Interpolation von der richtigen Messmittelkennlinie erfordert einen erheblichen Aufwand. Oft reicht aber eine Methodenvalidierung aus.

Herzlind Dank

Messunsicherheit
ISBN 978-3839190265



Messen, Kalibrieren, Prüfen
ISBN 978-3837097474

Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM
ISBN 978-83753490175

Management von Kalibrier- und Prüflaboratorien
ISBN 978-3752622676

Bild: Gary Larson